弦_2_ギターのフレットの仕組みから音楽の音階のつくりを調べる

組	番	氏名

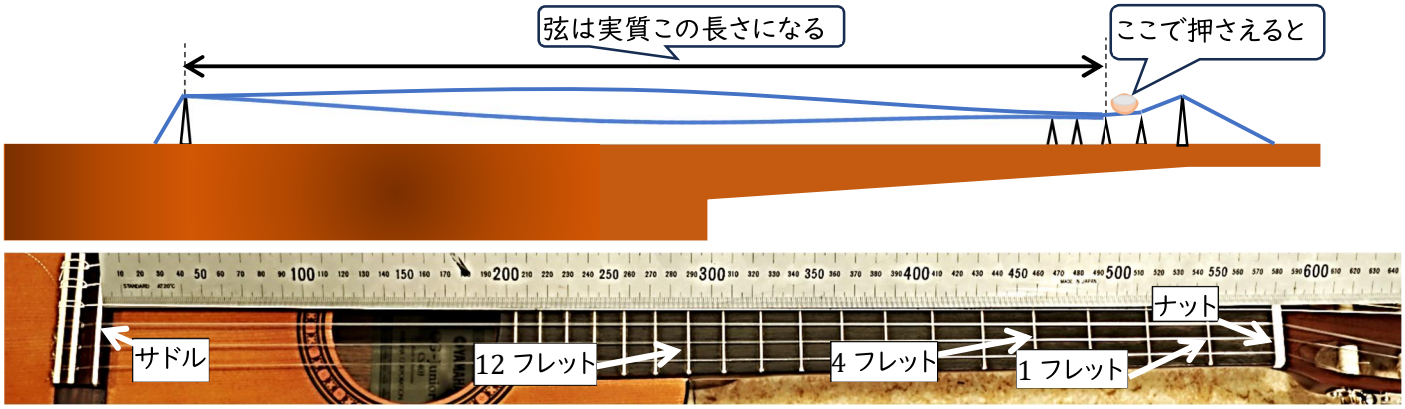
教員実験立ち会い認印

目的　ギターは、フレットを利用して、弦の実質的な長さを変えて様々な音程を基本振動で出す楽器です。また材料を変えて基本振動数を変えた弦を複数並べることで、フレットを押さえる手の位置をあまり変えずに様々な音程が出せたり同時に複数の音程を鳴らしたりできる。今回は、1 つの弦のフレットのある位置から、音楽の音階のつくりをみる。

装置　ギター、1m定規、関数電卓

実験　ギターのフレッドの位置による基本振動数の変化から平均律という音楽の音階の作り方を調べる。

ギターは、指でフレットの外側で弦を押さえ、振動する部分をサドル～フレットまでの長さに短くすることで波長を変え、基本振動数を変えて音程を出す楽器です。音楽の音階と弦の振動数の物理の関係は、フレットの打ち方から調べられる。フレットは音楽の半音に対応するように打ってあるので半音の変化に対応する振動数の変化を調べる。



手順 1.　1m定規の 0 側をサドル側に当てて、サドル⇔ナット間、サドル⇔1～4 フレット間とサドル⇔12 フレット間の距離を測る（mm までを m 単位で）

処理 1.　サドル⇔ナット間の基本振動数 110Hz のときの波長λ_0に対して、サドル⇔フレット間の波長λ_nの変化から振動数 f が波長λに反比例することを利用して振動数 f_n を求める。 $f_n = \frac{\lambda_0}{\lambda_n} \times f_0$

結果（2点）

	サドル ⇔ ナット	サドル ⇔ 1 フレット	サドル ⇔ 2 フレット	サドル ⇔ 3 フレット	サドル ⇔ 4 フレット	サドル ⇔ 12 フレット
弦の長さ＝$\frac{波長}{2}$	$\frac{\lambda_0}{2}$ = m	$\frac{\lambda_1}{2}$ = m	$\frac{\lambda_2}{2}$ = m	$\frac{\lambda_3}{2}$ = m	$\frac{\lambda_4}{2}$ = m	$\frac{\lambda_{12}}{2}$ = m
振動数 f	f_0 = **110** Hz	f_1 = Hz	f_2 = Hz	f_3= Hz	f_4 = Hz	f_{12} = Hz
音程	ラ	ラ#	シ	ド	ド#	ラ

処理 2. 振動数 f は半音毎に定数倍増えると仮定し、数列 f_n は等比数列と考え公比 r を調べる。小数第 3 位まで（1 点）

$r=f_1/f_0$	$r=f_2/f_1$	$r=f_3/f_2$	$r=f_4/f_3$	$r^{12}=f_{12}/f_0$

結論（1 点）

音楽の音階の振動数は、半音ごとに定数倍増えるしくみで、数列 f_n は公比 r=［　　］の等比数列になっている。

1 オクターブ（12 音階）で振動数は［　　］倍になっており、逆に半音ごとの公比は1オクターブの倍数の 12 乗根になる。

振動数f_0の音程からn回半音上がった音程の振動数f_n　・・・　$f_n = f_0 r^n$

これは現在の音楽で採用されている平均律という音階の決め方である。

裏面に考察あり

考察

1 オクターブ（12 音階）で振動数 f は 2 倍になる。

$f_{ラ} \times r^{12} = f_{ラ} \times 2$ より

半音毎の振動数の変化　$f_n = f_{ラ} \times \left(2^{\frac{1}{12}}\right)^n$

∴公比 $r = 2^{\frac{1}{12}} = 1.05946\cdots$ を 12 回かけると 2 になる。　すなわち半音上がるごとに振動数は 1.05946…倍増える。

音程	ラ	ラ#	シ	ド	ド#	レ	レ#	ミ	ファ	ファ#	ソ	ソ#	ラ
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24

例　5 弦のラの基本振動数は f=110Hz で、4 倍振動は f=440Hz ですが、4 倍振動の音程は何になるか？

上の公式にあてはめると　$440 = 110 \times \left(2^{\frac{1}{12}}\right)^n$　となるので　$4 = 2^{\left(\frac{n}{12}\right)}$　両辺の $\log_2$ をとると　$\log_2 4 = \log_2 2^{\left(\frac{n}{12}\right)}$

$\log_2 2^2 = \log_2 2^{\left(\frac{n}{12}\right)}$　$\log_2 2 = 1$ より $2 = \frac{n}{12}$　したがって $n = 24$　となるので上の表から **4 倍振動は 2 オクターブ上のラであることが分かる。**

課題　同様にして 5 弦の 3 倍振動 f=330Hz がドレミファソラシドのどの音程に近いか求めよ。

上の公式にあてはめると　$330 = 110 \times \left(2^{\frac{1}{12}}\right)^n$ から　$3 = 2^{\left(\frac{n}{12}\right)}$　となるが、3 は 2 のべき乗ではないので $\log_2$ をとっても 4 倍振動の例のようにぴったりは解けない。

3 は、$2^{\frac{1}{12}} \fallingdotseq 1.059$ の何乗倍に近いか？

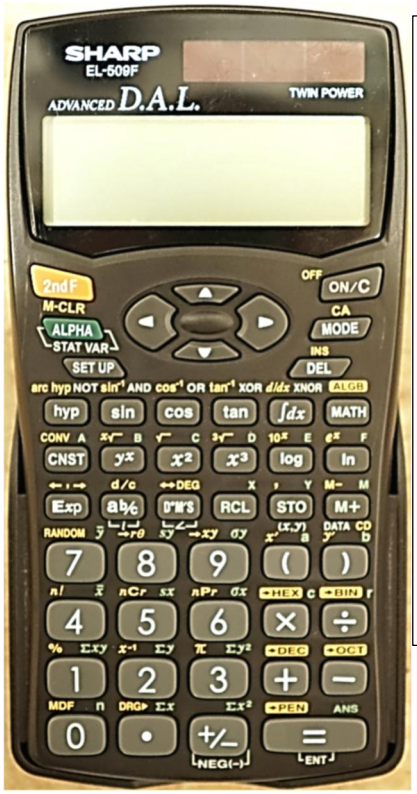
$1.059^2 = 1.121$, $1.059^3 = 1.187$, $1.059^4 = 1.257$, $1.059^5 = 1.331\cdots$ と 3 に近くなりまで地道に実験するか、下記を参考にして電卓で実験して探して求めなさい。その n から上の表を使ってドレミファソラシドのどの音程に近いか求めよ。（2点）

考察

結論　　基本振動が 110Hz のラの弦の 3 倍振動の音程はドレミファソラシドの［　　］に近い。

また、ほかの5倍振動、6倍振動、7倍振動などの倍振動もどれかの音程に近いのだろうか？

例えば関数電卓で $2^{\frac{16}{12}}$ を計算する方法



まず、$2^{\frac{1}{12}}$ を変数 A に記憶させる。

［12］［2ndF］［y^x］［2］［=］［STO］［CNST］

（［y^x］のキーの上に $\sqrt[x]{\ }$ とある）

（［CNST］のキーの上に A とある）

意味は『12 乗根__他でもなく 2 の__をストア(保管)する__A に』

次に A 16 することで $2^{\frac{16}{12}}$ を計算する

［ALPHA］［CNST］［y^x］［16］［=］

意味は『A を__べき乗することの__16 乗 』

電源を切る。

［2ndF］［ON/C］